ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
ИМ. Е.С. ВЕНТЦЕЛЬ
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2019-2020 УЧ. ГОД
Решения к отборочному этапу
11 класс

Задание 1.

Решить неравенство:

$$\sqrt[3]{27-x^3}\sqrt{5x-6-x^2}\le 0.$$

В ответе указать сумму целочисленных решений.

Решение:

1) $5x-6-x^2=0 \Rightarrow x=2; x=3.$

2) $\begin{cases} 5x-6-x^2\ge 0; \\ 27-x^3\le 0 \end{cases} \Rightarrow x=3$

Ответ: 5

Задание 2.

Сколько решений имеет уравнение $\left|x^2+a\right|=1$ при разных значениях a? В ответе указать наибольшее целое значение параметра a, при котором число решений будет наибольшим.

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+a=1 \\ x^2+a=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1-a \\ x^2=-1-a \end{array}\right.$$

$a>1 \Rightarrow$ *решенийн нет;*

$a=1 \Rightarrow x=0;$

$|a|<1 \Rightarrow$ *два корня;*

$a=-1 \Rightarrow$ *три;*

$a<-1 \Rightarrow$ *четыре*

Ответ: -4

Задание 3.

Вычислить $\sin 50^0(1-2\cos 80^0)$.

Решение:

$$\boldsymbol{\sin 50 - 2\sin 50 \sin 10 = \sin 50 - (\cos 40 - \cos 60) = \cos 60 = 0{,}5.}$$

Ответ: 0,5

<u>Задание 4.</u>

Решить уравнение:

$$\sqrt{35 - 2\sqrt{45 - 2x}} = x - 5.$$

Ответ: 10

<u>Задание 5.</u>

На графике функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 1}$ найти все точки, абсциссы и ординаты которых одновременно являются целыми числами.

В ответе указать сумму абсцисс этих точек.

Решение:

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 1} = \frac{x(x-1) - (x-1) + 3}{x - 1} = x - 1 + \frac{3}{x - 1};$$

$$x - 1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 4; \\ y = 4 \end{cases} \quad x - 1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = 2 \end{cases}$$

$$x - 1 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0; \\ y = -4 \end{cases} \quad x - 1 = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = -2; \\ y = -4 \end{cases}$$

Ответ: 4

<u>Задание 6.</u>

Из пункта ***A*** по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему из пункта ***B***, расположенного ниже по течению относительно пункта ***A***, отправляется катер. Встретив плот, катер сразу же разворачивается и идет вниз по течению. К моменту возвращения катера в пункт ***B*** плот проходит расстояние, равное ***2/5*** пути от ***A*** до ***B***. Найти отношение скоростей катера (в стоячей воде) и скорости течения реки.

Решение:

Пусть расстояние между пристанями равно 1, скорость плота x, а скорость катера в стоячей воде y.

Время до встречи равно $\dfrac{1}{x+(y-x)}=\dfrac{1}{y}$;

Путь, пройденный до встречи плотом равен $\dfrac{x}{y}$; катером $\dfrac{y-x}{y}$;

Время движения катера после разворота равно $\dfrac{y-x}{y(y+x)}$;

за это время плот проплыл расстояние $\dfrac{x(y-x)}{y(y+x)}$.

Получим уравнение $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x(y-x)}{y(y+x)}=\dfrac{2}{5}$. Обозначим $\dfrac{x}{y}=a$.

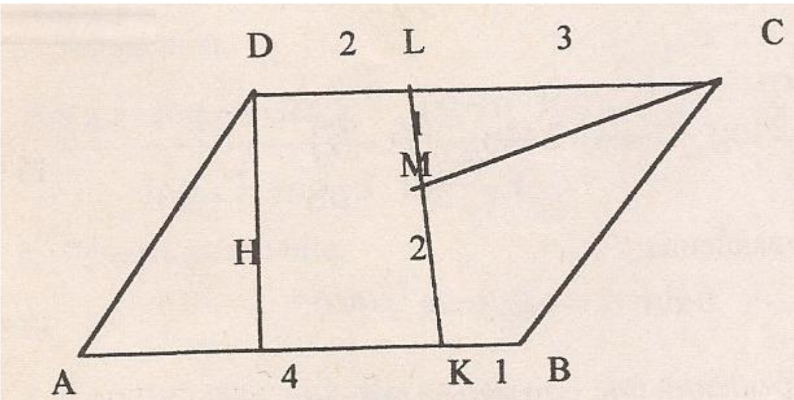
Получим $a+\dfrac{a(1-a)}{1+a}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}\Rightarrow \dfrac{y}{x}=4.$

Ответ: 4

Задание 7.

В параллелограмме ***ABCD*** точка ***K*** делит сторону ***AB*** в отношении ***AK : KB=4:1***; точка ***L*** делит сторону ***CD*** в отношении ***CL : LD=3:2***. Точка ***M*** делит отрезок ***KL*** в отношении ***KM : ML=2:1***. Найти площадь четырехугольника ***BCMK***, если площадь параллелограмма ***ABCD*** равна ***20*** дм^2.

Решение:



Обозначим высоту, опущенную на ***AB***, ***H***, ***AB = CD = a*** и высоту, опущенную из точки ***M*** на ***CD***, ***h***. Тогда ***h = H/3***.

$$S_{BKLC}=\frac{\frac{3}{5}a+\frac{1}{5}a}{2}H=\frac{2}{5}aH=\frac{2}{5}20=8\cdot$$

$$S_{MCL}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{3}{5}a=aH/10=2\cdot$$

Следовательно, $S_{KBCM}=8-2=6$.

Ответ: 6

<u>Задание 8.</u>

Вычислить $log_{\sqrt{3}-1}\left(4-2\sqrt{3}\right)-log_{5+2\sqrt{6}}\left(5-2\sqrt{6}\right)$.

Решение: $log_{\sqrt{3}-1}\left(4-2\sqrt{3}\right)-log_{5+2\sqrt{6}}\left(5-2\sqrt{6}\right)=$

$$=log_{\sqrt{3}-1}\left(\sqrt{3}-1\right)^2-log_{5+2\sqrt{6}}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{-1}=2+1=3$$

Ответ:3